

以貝氏網路為基礎之學生分數概念診斷系統

高健智 (kao1@tp.edu.tw)、張景翔 (casa@tp.edu.tw)

臺北市內湖區東湖國小

【摘要】本研究是針對學童在數學分數概念學習，開發出一套以貝氏網路為主的分數學習診斷系統，診斷與推論出國小六年級學童對分數概念的錯誤概念，最後提供給學生建議的補救學習路徑。

【關鍵字】貝氏網路 (Bayesian Networks)、貝氏網路診斷系統

一、研究背景與動機

「分數」在數學課程中佔有極重要的角色，然而分數概念的學習，對兒童而言卻是最困難的部分。因此，若能在兒童分數學習的診斷上，有效的找出兒童學習上相關聯的錯誤概念，給予正確的補救學習路徑建議，預期將能有效的改善兒童對分數學習時所產生的錯誤概念。

本研究期望能利用貝氏網路，建構出一套能針對國小六年級學童分數概念，做評量、診斷、分析並提出補救學習建議路徑的線上「分數概念貝氏網路診斷系統」。

二、相關文獻探討

(一) 貝氏網路 (Bayesian Networks)

1. 條件機率
2. 貝氏網路
3. 貝氏網路推論

三、貝氏網路推論演算法

當在貝氏機率網路裡做推論時，基本上可將多連通圖拆成單連通圖處理，其推論法式可使用由下而上推演、由上而下推演做處理，Richard (2003)在其著述 Learning Bayesian Networks 依據 Kim 及 Peal's 的訊息傳遞演算法。}

當學生經線上測驗後，可利用此貝氏推論演算法，藉由概念關聯推演受檢測的概念其概念認知程度為何？以便尋找正確的補救教學學習路徑。

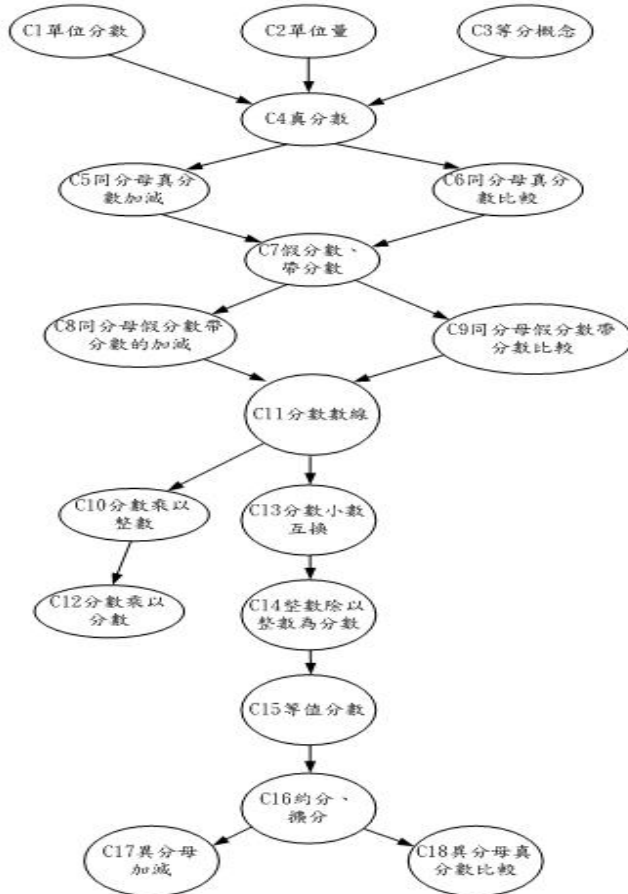
四、研究過程

(一) 研究架構

本研究之研究架構，其詳細研究步驟可分成下列步驟進行：

1. 訪談教師，分析學童分數應學習的概念，請專家確認應學習的概念。
2. 採用專家模糊德菲法，對學者專家及現任教師進行訪談與問卷調查，確認分數概念關聯情形，再繪製出分數概念關聯圖。
3. 依據已確認之分數概念，挑選試題。
4. 進行試題預試，再依據預試結果，去除項目分析中難度、鑑別度不佳的題目，更換合適的題目，再進行試題預試，直至試題項目分析結果令人滿意為止。
5. 學習診斷測驗：共收集 668 名學童受測資料。
6. 做資料分析與系統修正。
7. 製作出國小分數概念貝氏推論系統。
8. 透過系統推論，診斷出學生對每一概念的認知狀況。
9. 根據每一學生的概念認知狀況及錯誤概念，提出補救學習建議路徑。
10. 提出研究結論與建議。

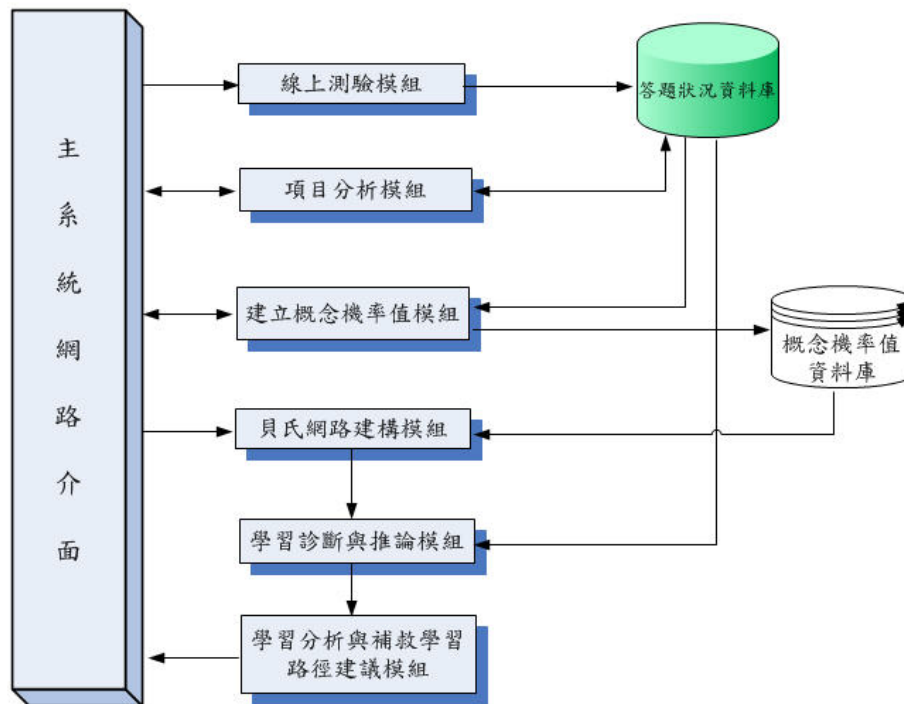
(二) 專家確認後之國小數學分數學習概念關聯圖



(三) 建立測驗題庫

採用「94 年台中市國小數學檢測題庫」(台中市國小數學科輔導團編製)，每一道題目存在一個學習概念，測驗後，在正確概念機率值的取得上，採用台中市國小數學科輔導團針對台中市 13 所學校六百多位國小六年級學生所做的數學診斷試題中，從中萃取與分數學習相關的代表性試題 22 題，預備做為本研究的施測題目。

(四) 建立貝氏網路系統，藉以診斷國小學童在分數學習上的學習概念：



學習評量診斷系統架構

在建構分數概念之貝氏網路實作上，則採用 GeNIe 計畫之 smile.net 程式庫工具，利用此程式庫工具可以在 ASP .net 裡，依據前述 Pearl's 貝氏網路建構演算法撰寫程式碼，用以建構分數概念之貝氏網路並且設定各節點之機率值表 (CPT)值。系統以 ASP、ASP.net 結合 Access 資料庫撰寫線上測驗及各類資料分析程式，有關診斷推論部分則使用 ASP.net 結合 smile.net 程式庫工具。

依據前述 668 名學生的施測資料，設定貝氏網路的條件機率表(CPT)，再運用 smile.net 程式庫工具，產生貝氏網路節點，結合兩者建構出貝氏網路。當建立好貝氏網路後，每一概念節點的條件機率表裏的條件機率值，即可表達概念與概念間的相互影響關係。各概念的 CPT 設定如下 (列舉概念 C1~C4)：

C1T : 0.906 (C1T 表概念 C1 答對率，T 表答對)

C1F : 0.094 (C1F 表概念 C1 答錯率，F 表答錯)

C2T : 0.665

C2F : 0.335

C3T : 0.904

C3F : 0.096

C4TTTT : 0.918 (C1C2 C3C4 皆答對的機率)
 C4TTTF : 0.082 (C1C2 C3 答對 C4 答錯的機率)
 C4TTFT : 0.55
 C4TTFF : 0.45

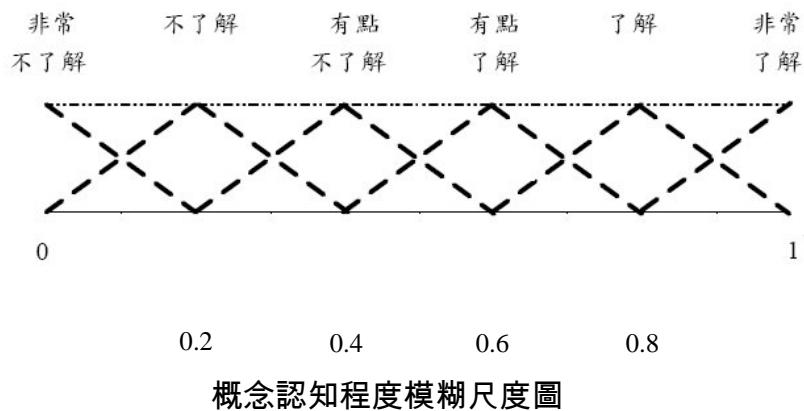
.....

當建立完成貝氏網路後，藉著實際的推論可得知學生的學習狀況。

五、貝氏推論與分析

(一) 概念推論

首先將各概念的機率表值從資料庫讀出後輸入到貝氏網路裡，接著，針對各個概念節點，依據節點的父節點以及子節點的事件發生 (evidence) 狀況(T or F)做設定，完成後，更新貝氏網路，可產生對概念節點的推估機率值，此機率值表示父節點以及子節點的某特定事件發生下，對該節點預估發生的機率值。



由於概念認知程度在分析上有其模糊性，因此在推論分析上採用上圖概念認知程度模糊尺度進行推論分析，例如：若概念節點推估後的機率值為0.78，其認知程度落則在「了解」與「有點了解」之間；若是概念節點推論後的機率值為0.15，其認知程度落則在「非常不了解」與「不了解」之間。除此之外概念的認知還須配合該概念實際的答題狀況 (對或錯) 做真正的判斷。

(二) 補救學習路徑建議

依據貝氏網路的診斷推論，可明確的指出每一概念的了解程度，若概念處

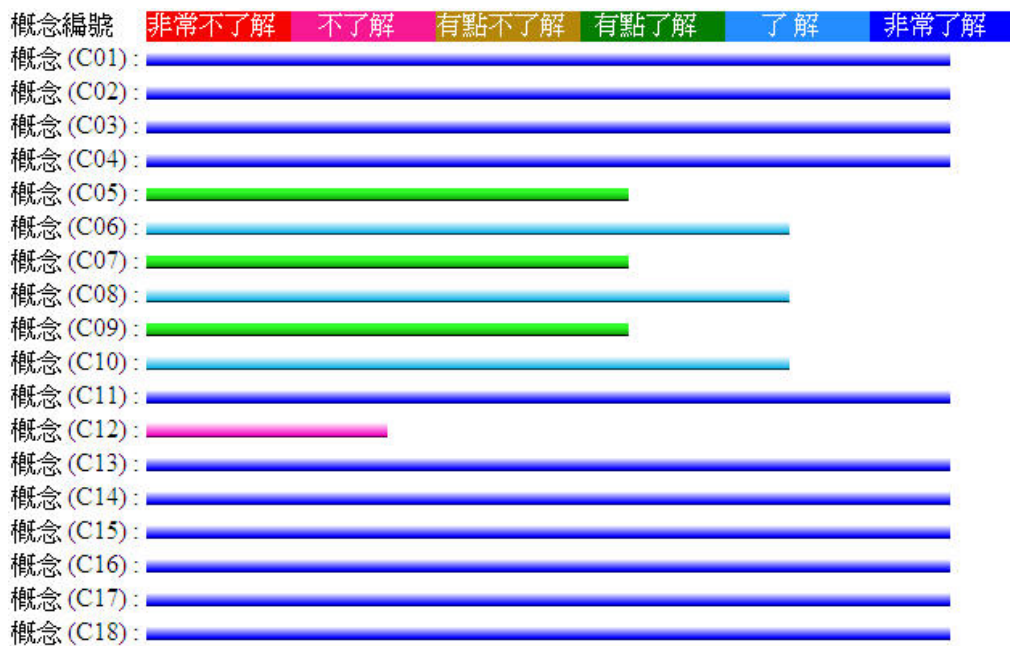
於尚了解與不大了解的模糊地帶，則只需對概念做加強。若概念屬於不了解或相當不了解，則需要對該概念及父節點概念做補救學習。

1. 從節點 C_1 開始依序分析
2. 若某位學生 S_j 經測驗與貝氏推論後，得知其某概念 C_i 屬於不了解或相當不了解，則輸出 “應加強概念 C_i ”。
3. 概念 C_i 屬於不了解或相當不了解，則從節點 C_i 尋找 C_i 的父節點 C_p ，並判斷是哪些父節點 C_p 概念答錯，輸出所有答錯父節點 C_p 到概念 C_i 的路徑。
4. 分析至節點 C_{18} 為止，所輸出的路徑，即為學生 S_j 對此一概念所應學習的學習補救路徑。

學生概念推論與分析以及學習補救路徑，輸出如下所示，+++表概念認知程度最佳，---表概念認知程度最差。

學校：B，學號：60610，答對概念：16，答對率：90.9 %

-
- 概念 (C01) 的診斷結果為：[對概念 (C1) 介於非常了解與了解之間+++]
- 概念 (C02) 的診斷結果為：[對概念 (C2) 介於非常了解與了解之間+++]
- 概念 (C03) 的診斷結果為：[對概念 (C3) 介於非常了解與了解之間+++]
- 概念 (C04) 的診斷結果為：[對概念 (C4) 介於非常了解與了解之間+++]
- 概念 (C05) 的診斷結果為：[對概念 (C5) 介於有點了解與有點不了解之間]
- 概念 (C06) 的診斷結果為：[對概念 (C6) 介於了解與有點了解之間++]
- 概念 (C07) 的診斷結果為：[對概念 (C7) 應介於非常了解與了解之間，但答錯，很可能是誤答]
- 概念 (C08) 的診斷結果為：[對概念 (C8) 介於了解與有點了解之間++]
- 概念 (C09) 的診斷結果為：[對概念 (C9) 介於有點了解與有點不了解之間]
- 概念 (C10) 的診斷結果為：[對概念 (C10) 介於了解與有點了解之間++]
- 概念 (C11) 的診斷結果為：[對概念 (C11) 介於非常了解與了解之間+++]
- 概念 (C12) 的診斷結果為：[對概念 (C12) 介於有點不了解與不了解之間--]
- 概念 (C13) 的診斷結果為：[對概念 (C13) 介於非常了解與了解之間+++]
- 概念 (C14) 的診斷結果為：[對概念 (C14) 介於非常了解與了解之間+++]
- 概念 (C15) 的診斷結果為：[對概念 (C15) 介於非常了解與了解之間+++]
- 概念 (C16) 的診斷結果為：[對概念 (C16) 介於非常了解與了解之間+++]
- 概念 (C17) 的診斷結果為：[對概念 (C17) 介於非常了解與了解之間+++]
- 概念 (C18) 的診斷結果為：[對概念 (C18) 介於非常了解與了解之間+++]



建議的補救教學路徑：

1. 應補救 概念 (C10->C12)

六、研究結果分析

本研究在研究過程中所遇到的問題及解決方式，如下所述：

(一) 試題項目分析

本研究在項目分析研究過程中發現：

1. 概念測驗中的學生數愈多，各概念的答對率、難度、鑑別度會逐漸趨於穩定，學生數若低於 400 人以下，答對率、難度、鑑別度等數值變動性較大，如：

表 6-1 項目答對率比較表

題 號	600 人	500 人	400 人	300 人	200 人	100 人
-----	-------	-------	-------	-------	-------	-------

1	0.898	0.892	0.9	0.893	0.895	0.89
2	0.64	0.642	0.658	0.653	0.64	0.63
3	0.897	0.904	0.908	0.913	0.915	0.91
4	0.827	0.832	0.845	0.86	0.875	0.87

診斷的試題需事先做好項目分析，對於太難或太容易的試題都會影響到概念機率值，進而影響到貝氏網路推論結果。

2. 不同區域的學生，在素質上有所差別，會影響概念的答對率，進而影響到整體貝氏網路條件機率表(CPT)的值，亦對推論結果有所影響。

表 6-2 不同區域學生項目答對率比較表

題號	A校	B校	C校	D校	E校	F校
1	0.894	0.943	0.797	0.964	0.917	0.956
2	0.659	0.682	0.578	0.655	0.556	0.644
3	0.877	0.949	0.875	0.818	0.917	0.933
4	0.832	0.854	0.773	0.818	0.778	0.911

因此，在試題的製作及項目分析上，宜採多校且樣本數大於 500 人以上為宜，樣本數太少或受測區域性不明顯，較無法取得試題的準確度。

(二) 貝氏網路的建立

使用貝氏網路作學習診斷，在建立貝氏網路的前置作業時就顯得相當重要，錯誤的網路圖，無法產生正確的結果。本研究在概念關聯圖的建立上，採用模糊德菲法彙整概念關聯訪談結果，使得概念關聯可以快速收斂得到一共識結果，在研究過程中發現，委請專家、學者修正是很重要的，實際的教育工作者對概念關聯的看法，非常有別於專家、學者的看法，在概念關聯的制定上，至少需要 1/3 以上的專家、學者參與，並且需要請專家、學者做最後的修正與認定。

建立貝氏網路另一重點是節點條件機率表的產生，本研究利用對學生的答題狀況做紀錄，直接的根據節點所需的機率表值做統計與計算，以得出真實的

機率表值，這對之後的貝氏網路推論影響是最大的，因此正確的計算節點機率表值，也是關係研究成敗的重要關鍵之一。

(三) 貝氏網路的訊息更新

一個概念除了受先備概念影響外，也會受後繼概念影響。透過貝氏網路，將父節點與子節點各種可能發生狀況輸入，並做訊息更新，觀察概念節點機率值的變化，可發現，在學習概念診斷上，概念除了受先備概念影響外，確實也會受後繼概念的些微影響。

(四) 貝氏網路的推論結果

從本研究中發現，藉由貝氏網路訊息更新後概念節點的推估機率值，配合「概念認知程度模糊尺度」，可讓概念的認知狀況推論更加有彈性。概念的認知狀況不再只是了解、不了解，而是能依據貝氏網路藉由先備、後繼概念的答題狀況推論，當得知概念應答對或答錯的機率後，可根據實際概念的答對與否，搭配使用「概念認知程度模糊尺度」，可配對產生十種診斷推論結果，在概念診斷上，比模糊推論或是關聯概念推論要來得有彈性的多。

從本研究中也發現，概念的答對率會影響節點條件機率表的建立，而節點的條件機率，則會影響節點訊息更新後的機率值，搭配目前所制定的「概念認知程度模糊尺度」，可發現所得出的推論需要稍微做修正。例：當概念答對機率值偏低，如 C6 (0.698)，就算其父節點 C4、子節點 C7 皆答對，所得的訊息更新機率值，也不過為 0.79，若 C6 答對，對照「概念認知程度模糊尺度」，其推論落在「對概念介於有點了解與了解之間」，實際上應該推論為「對概念介於了解與非常了解之間」，雖推論正確，但在程度上還是有所差別。

因此每一概念的答對率其理想值應該在 0.75~0.9 之間。為得到較理想的貝氏網路診斷與推論，在試題的項目分析上需做嚴謹的分析與篩選。而在「概念認知程度模糊尺度」的制定上，須依據實際各概念的各種訊息更新機率值做些微的調整，本研究所提出的「概念認知程度模糊尺度」，經研究發現是可行的，但須配合實際狀況略作調整。

(五) 補救學習路徑的成效

在許多學習診斷文獻中顯示，補救學習路徑應從概念的根節點開始，從根

節點到發生錯誤概念的節點，列出完整的節點路徑，即是應補救的學習路徑。但從實際研究中發現，這種形式的補救學習路徑，已包含了許多非常了解及了解的概念節點，實際上這些概念是無需補救的。

貝氏網路，由於先天上的限制：父節點的機率值只影響下一節點的機率值，反而在概念關聯上，形成較強的關連。因此，使用貝氏網路追蹤補救學習路徑，顯得較有效率且明確，搭配診斷推論，還可判斷概念節點是屬於加強單一概念，或是補救關聯的概念；若是補救關聯概念只需列出相關聯的父節點概念與此節點概念代碼，在實作上相當容易，在建議的補救學習路徑上，也不會列出不該補救的概念節點，所提供的建議補救學習路徑則能更加的符合受診斷者的需求。

六、結論與建議

綜合本研究的研究結果分析，使用貝氏網路作學習診斷，在概念認知推論與分析上可得到具體的成效，而對提供學生建議的補救教學路徑，也有所成效。但本研究也有幾個困難點需要後續的研究與克服：

1. 目前本研究在題庫的建立上採取一道試題一個概念，在後續的概念認知診斷過程中，略顯數據單薄，未來可編製一道試題隱含多個概念。
2. 本研究對概念關聯的建立採用問卷填寫方式，在收集資料上略顯繁雜，未來可嚐試使用線上填寫方式，而所收集到的資料，可使用程式自動計算並且提出概念關聯圖。
3. 概念節點的條件機率表值會直接影響到貝氏網路的推論結果，因此在編製試題時，要確實做好試題項目分析，各試題的答對率應介於 0.75~0.9 之間較理想。
4. 目前本研究推論概念認知程度時，所使用的「概念認知程度模糊尺度」，採取模糊方式處理認知程度，其機率範圍介於 0~1 之間，但貝氏網路中各概念節點的推論機率值，很可能偏低或偏高，必須對偏低或偏高的推論機率值做轉換處理，讓推論結果更加合理。
5. 本研究所使用的「概念認知程度模糊尺度」只能算是合理範圍內使用，尺度裡各認知程度範圍的制定可再研究；而辨別概念認知程度的尺度，亦可使用其他尺度做辨識。